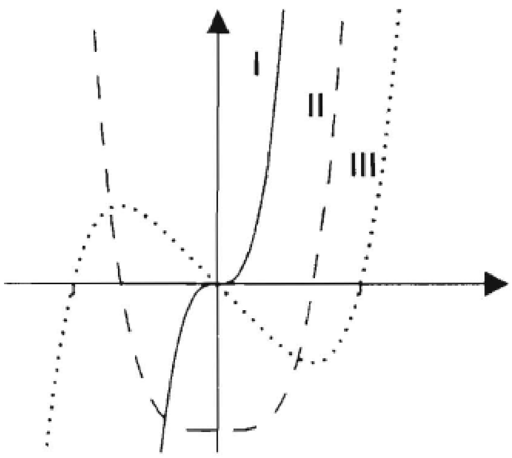
**QUESTIONARIO**

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
3. Sia $R$ la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse $x$ e dalla retta $x = 2$ e sia $W$ il solido ottenuto dalla rotazione di $R$ attorno all'asse $y$. Si calcoli il volume di $W$.
4. Il numero delle combinazioni di $n$ oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi $n$.
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse $x$ da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.
6. Si calcoli
$$\lim_{x \to a} \frac{tgx - tga}{x - a}$$
7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra $-1$ e $0$.
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione $f$, un altro lo è della funzione derivata $f'$ e l'altro ancora di $f''$.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

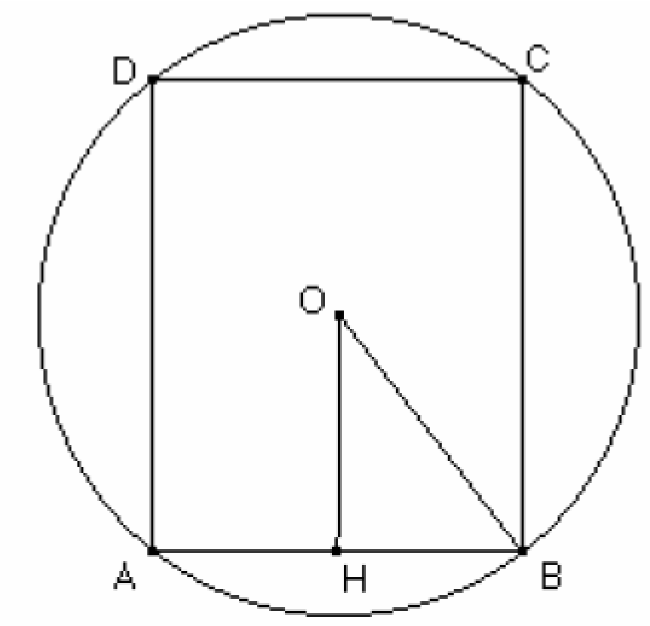



| | $f$ | $f'$ | $f''$ |
|---|---|---|---|
| A) | I | II | III |
| B) | I | III | II |
| C) | II | III | I |
| D) | III | II | I |
| E) | III | I | II |

Si motivi la risposta.

Quesito 1

Consideriamo la seguente figura:




Indichiamo con 2x, con 0<x<60, l'altezza CB del cilindro; di cnseguenza OH=x e il quadrato del raggio di base del cilindro è $\overline{HB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OH}^2 = 3600 - x^2$; il volume del cilindro è quindi $V(x) = \pi \cdot 2x \cdot (3600 - x^2)$ e per calcolarne il valore massimo basta calcolarne la derivata prima: $V'(x) = 2\pi \cdot (3600 - 3x^2)$ il cui segno è

$$V'(x) = 2\pi \cdot (3600 - 3x^2) > 0 \rightarrow 0 < x < 20\sqrt{3}$$
$$V'(x) = 2\pi \cdot (3600 - 3x^2) < 0 \rightarrow x > 20\sqrt{3}$$

Per cui dal segno soprastante ricaviamo che il volume è massimo per $x = 20\sqrt{3}$ e cioè per altezza del cilindro $h = 2x = 40\sqrt{3}cm$ e raggio di base $r = 20\sqrt{6}cm$. Il valore massimo è pertanto $V_{\max} = \left[\pi \cdot 2x \cdot (3600 - x^2)\right]_{x=20\sqrt{3}} = 96000\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3 \cong 522{,}37 \text{ litri}$.

Quesito 2

Un punto P della curva ha coordinate $(x, \sqrt{x})$ e la distanza dal punto (4,0) è $d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$. Massimizzare la funzione distanza è equivalente a massimizzare la funzione quadrato della distanza, per cui massimizzeremo la funzione $h(x) = d^2 = x^2 - 7x + 16$; la derivata prima è $h'(x) = 2x - 7$ per cui la funzione $h(x)$ è strettamente crescente in $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ per cui presenta un minimo all'ascissa $x=\frac{7}{2}$. Il punto più vicino è quindi $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ e la distanza minima è $d_{\min}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Quesito 3

Il volume richiesto è pari alla differenza tra il volume del cilindro di altezza 8 e raggio di base 2 e il volume della regione delimitata da $y=x^3$, dall'asse *y* e dalla retta $y=8$; il volume del cilindro è $V_C=A_b\cdot h=\pi\cdot 4\cdot 8=32\pi$ mentre Il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y=x^3$, dall'asse *y* e dalla retta $y=8$, è $\mathrm{V_D}=\pi\cdot\int_0^8 g^2(y)dy$ dove $g(y)=\sqrt[3]{y}, 0\le y\le 8$; quindi

$$\mathrm{V_D}=\pi\cdot\int_0^8 g^2(y)dy=\pi\cdot\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy=\frac{3}{5}\pi\cdot\left[y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{96}{5}\pi .$$

In conclusione $\mathrm{V}=\mathrm{V_C}-\mathrm{V_D}=32\pi-\frac{96}{5}\pi=\frac{64}{5}\pi$.

Quesito 4

Si deve risolvere l'equazione $\binom{n}{4}=\binom{n}{3}$ con $\mathrm{n}\ge 4$. Si ha:

$$\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}=\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}\rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\rightarrow n(n-1)(n-2)(n-7)=0$$ da cui

n=0,1,2,7. Poichè per ipotesi deve essere $n\ge 4$ la soluzione accettabile è n=7.

Quesito 5

L'area richiesta, ricordando che il coseno cambia segno, da negativo a positivo in corrispondenza di $\frac{\pi}{2}$ vale:

$$Area=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^2\cos x dx=[\sin x]_1^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^2=$$
$$=1-\sin(1)-\sin(2)+1=2-\sin(1)-\sin(2)$$

Quesito 6

Il limite $\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$ si presenta nella forma indeterminata 0/0 per cui applicando de l'Hopital si ha $\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 a}$

Quesito 7

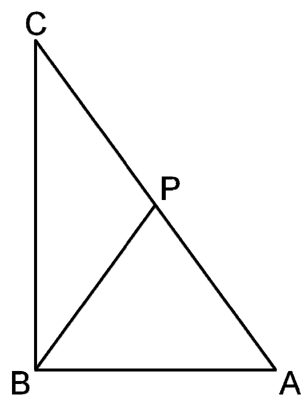
La funzione $f(x)=x^{2011}+2011x+12$ è strettamente crescente in tutto il dominio R in quanto la derivata prima $f'(x)=2011x^{2010}+2011$ è sempre positiva; inoltre assume agli estremi dell'intervallo (-1,0) segno discorde in quanto $f(-1)=-2000<0, f(0)=12>0$ per cui a norma del teorema degli zeri esiste un unico zero dell'equazione $f(x)=x^{2011}+2011x+12=0$ e compreso in (-1,0)

Quesito 8

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca. In sostanza quello della quadratura del cerchio non è altro che un classico problema di matematica (più precisamente di geometria) il cui scopo è costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso.

Quesito 9

Consideriamo la figura sottostante




Consideriamo il piano su cui giace il triangolo; P è il punto medio dell'ipotenusa essendo BP la mediana e P coincide con il circocentro e in quanto tale è equidistante dai tre vertici. Consideriamo la perpendicolare per P e prendiamo un punto H. I triangolo APH, BPH e CPH sono rettangoli in P per cui applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{HC}^2=\overline{PH}^2+\overline{PC}^2$$
$$\overline{HA}^2=\overline{PH}^2+\overline{PA}^2$$
$$\overline{HB}^2=\overline{PH}^2+\overline{PB}^2$$

Poichè P è equidistante dai tre vertici si ha $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ da cui deduciamo, viste le 3 formule di cui sopra, $\overline{HA}=\overline{HB}=\overline{HC}$ e poichè H è arbitrario la proprietà si può ritenere valida.

Quesito 10

Risposta esatta D.

Infatti se assumiamo come f la funzione 3 ci rendiamo conto che la derivata prima si annulla in due punti in corrispondenza del massimo e del minimo relativo che assume f. Inoltre deve avvenire che la derivata prima deve essere positiva tra meno infinito e il massimo di f, negativa tra massimo e minimo, e poi di nuovo positiva dal minimo in poi. E ciò è quello che succede nella funzione 2. Inoltre la derivata seconda deve azzerarsi solo in zero che è flesso per f, passando da valori negativi a valori positivi, cosa che accade per la funzione 1