PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)\ e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\boldsymbol{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)\ e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\boldsymbol{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

1) La derivata della funzione $f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ è $f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} - \frac{(ax+b)}{3}e^{-\frac{x}{3}} = \left(\frac{-ax+3a-b}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$. Imponendo la presenza del massino in x=4 e quindi $f'(4) = 0$ si ricava a+b=0; imponendo invece $f(0) = 2$ si ricava b=-1; in conclusione a=1, b=-1;

2) Per studiare la funzione $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ procederemo allo studio della funzione ausiliaria $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}}$ e poi il grafico di f lo ricaveremo da quello di g traslandolo verso le ordinate positive di 3. Studiamo quindi $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}}$:
   a. Dominio:R
   b. Intersezione ascisse:x=1
   c. Intersezioni ordinate:(0,-1)
   d. Positività: $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} > 0 \rightarrow x > 1$
   e. Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R

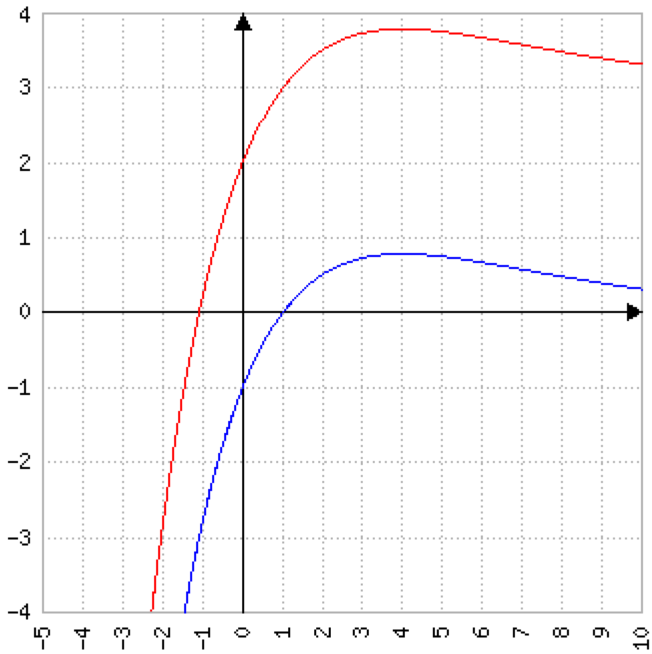
f. Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-\frac{x}{3}} = -\infty\cdot+\infty = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{e^{\frac{x}{3}}} \xrightarrow{\text{De L'Hospital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{e^{\frac{x}{3}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}} = 0$ per cui la retta y=0 è asintoto orizzontale destro;

g. Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\overbrace{\frac{(x-1)}{x}}^{\to 1}\overbrace{e^{-\frac{x}{3}}}^{\to+\infty} = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\overbrace{\frac{(x-1)}{x}}^{\to 1}\overbrace{e^{-\frac{x}{3}}}^{\to 0} = 0$

h. Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $g'(x) = \left(\frac{-x+4}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$ per cui è strettamente crescente in $(-\infty,4)$ e strettamente decrescente in $(4,+\infty)$ per cui $\left(4,3e^{-\frac{4}{3}}\right)$ è un massimo;

i. Concavità e convessità: $g''(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} - \left(\frac{-x+4}{9}\right)e^{-\frac{x}{3}} = \left(\frac{x-7}{9}\right)e^{-\frac{x}{3}}$ per cui $\left(7,6e^{-\frac{7}{3}}\right)$ è un flesso a tangente obliqua.

I grafici di f e g sono di seguito presentati (in rosso il grafico di f e in blu quello di g):



3) La retta y=3 interseca la funzione $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ in x=1, per cui l'area richiesta va calcolata tenendo presente che se x è minore di 1 la retta di equazione y=3 sta sopra il grafico di f mentre se x è maggiore di 1 sta sotto per cui

$$Area=\int_0^1\left\{3-\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3\right]\right\}dx+\int_1^{+\infty}\left\{\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3\right]-3\right\}dx=\int_0^1\left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx$$

Utilizzando l'integrazione per parti si ha:

$$Area=\left[3(x+2)e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-\left[3(x+2)e^{-\frac{x}{3}}\right]_1^{+\infty}=\left(9e^{-\frac{1}{3}}-6\right)+9e^{-\frac{1}{3}}=18e^{-\frac{1}{3}}-6$$

4) Attravrso l'utilizzo della calcolatrice scientifica riportiamo i valori assunti dalla funzione $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$ per x=1,2,3,4,5,6 approssimati alla seconda cifra decimale:

x	y
0	2
1	3
2	3,51
3	3,74
4	3,79
5	3,76
6	3,68

Questa tabella di valori, confrontata con quella fornita nel testo, rispetta la condizione richiesta per cui la funzione $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$ è accettabile per spiegare il fenomeno dell'andamento del profitto. Visto che per $x\to+\infty$ la funzione $g(x)\to 0$ e quindi la funzione $f(x)=g(x)+3\xrightarrow{x\to+\infty}3$ e che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(4,+\infty)$ possiamo concludere che col passare degli anni il fatturato non potrà mai essere inferiore ai 3 milioni di euro.